# Matemáticas
## para Economía y Empresa
### Cálculo de Una Variable

José Vicente Ugarte

Desclée De Brouwer

# MATEMÁTICAS
# PARA
# ECONOMÍA Y EMPRESA

## CÁLCULO DE UNA VARIABLE

José Vicente Ugarte Susaeta

Profesor de la Universidad Comercial de Deusto

Con la colaboración de Miguel Ángel Larrinaga Ojanguren
Profesor de la Universidad Comercial de Deusto

BIBLIOTECA DE GESTIÓN
DESCLÉE DE BROUWER

# Presentación

Este libro está dirigido a aquellos alumnos que inician sus estudios universitarios de economía y empresa. Tiene como objetivo principal ayudar a los lectores a adquirir una base sólida de conocimientos de cálculo diferencial de una variable, con aplicaciones en áreas de economía y empresa, que les permita posteriormente dar el salto al cálculo diferencial de varias variables.

No se trata de un libro de teoría económica ni de administración, gestión o dirección de empresas sino de un libro de matemáticas. El libro contiene varios capítulos de aplicaciones que intentan ayudar a trasladar los conceptos matemáticos al campo de la economía y de la empresa, pero es un libro de matemáticas.

Tampoco es un libro dirigido a estudiantes de matemáticas sino a estudiantes de economía y empresa. En el libro se intenta mantener cierto rigor al presentar los conceptos, definiciones, teoremas y propiedades, pero se evita de forma deliberada las demostraciones de las mismas.

Se hace un esfuerzo para que el lector pueda entender bien los conceptos y propiedades, procurando explicarlos y visualizarlos si es posible mediante gráficas, de tal forma que se aprecien los matices que encierran y se pueda hacer una correcta aplicación de los mismos.

La estructura del libro es secuencial, pero el lector puede avanzar y retroceder conforme sienta que sus conocimientos previos no han quedado suficientemente asentados.

Los contenidos de los capítulos son los habituales de un libro de cálculo, más bien de cálculo diferencial, pero ha sido necesario excluir temas referentes a cálculo integral o a diferenciales y aproximaciones de funciones por exceder el alcance previsto. La selección de los temas seguro que está sesgada por mi apreciación personal sobre qué aspectos son más importantes o causan mayores dificultades a los alumnos.

Algunas explicaciones están orientadas para que, en un libro posterior que verá la luz, el lector se adentre con seguridad en el cálculo diferencial de varias variables.

Aunque se ha revisado numerosas veces la obra, pido disculpas al lector por los errores que pueda incluir y que con toda seguridad detectará.

Espero que este libro sea de ayuda al lector para que avance y asiente sus conocimientos de matemáticas.

El autor

Bilbao, Septiembre de 2009

# CONTENIDOS

## PRIMERA PARTE. FUNCIONES

# PRIMERA PARTE

# FUNCIONES

$$y = f(x)$$

# CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

**CONTENIDO**



Este primer capítulo está dedicado a recordar brevemente algunos conceptos básicos generalmente ya conocidos, los conjuntos de números y los intervalos, y a introducir otros conceptos fundamentales menos conocidos: las bolas abiertas, las nociones de topología en $\mathbb{R}$ y las clasificaciones de conjuntos. Pero, sobre todo, este capítulo está orientado a asentar un lenguaje matemático común y preciso que resulta imprescindible para desarrollar los capítulos posteriores. Los dos apéndices del capítulo pueden servir de ayuda al lector que sienta carencias de conocimientos en notación o teoría de conjuntos.

# 1.1 LOS NÚMEROS REALES

A lo largo de todo este libro el conjunto de números al que nos vamos a referir habitualmente es al conjunto de los números reales. Este conjunto, que se representa con la letra $\mathbb{R}$, es bien conocido por todos ya que estamos acostumbrados a operar con él aunque no conozcamos con precisión sus características y definición matemática.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ incluye otros conjuntos de números mas simples: los números *naturales* $\mathbb{N}$ que utilizamos para contar (1, 2, 3, …), los números *enteros* $\mathbb{Z}$ tanto positivos como negativos con el cero incluido (…, –2, –1, 0,+1,+2, …), y los números *racionales* $\mathbb{Q}$ que se pueden expresar como cociente de un entero y un natural y cuya expresión decimal es finita o periódica, como por ejemplo $-1/2 = -0{,}5$ ó $2/3 = 0{,}6666\ldots$ . Pero también incluye los números que se denominan *irracionales*, números que se representan por fracciones decimales no periódicas, como por ejemplo la raíz cuadrada de dos $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ , o las constantes $\pi = 3{,}1415\ldots$ o $e = 2{,}7182\ldots$ .

En el conjunto de los números reales siempre es posible sumar y multiplicar dos números reales, así como ordenarlos[1]. También es posible restarlos o dividirlos cuando el denominador no sea nulo.

Sin embargo, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no permite realizar operaciones tales como la raíz cuadrada de número negativos, para cuya solución sería necesario acudir a un conjunto más amplio: los números complejos o imaginarios $\mathbb{C}$. Este conjunto sólo aparecerá de forma ocasional y esporádica en este libro por lo que el lector que no lo conozca no debe preocuparse por ello.

En la Tabla 1.1 se muestran de forma esquemática y resumida cuales son los diferentes conjuntos de números:

**Tabla 1.1: Conjuntos de números**

| Símbolo | Conjunto | Números |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Naturales | $1, 2, 3, 4, \ldots$ |
| $\mathbb{Z}$ | Enteros | $\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$ |
| $\mathbb{Q}$ | Racionales | $p/q$ siendo $p\in\mathbb{Z}$ , $q\in\mathbb{N}$ |
| $\mathbb{R}$ | Reales | Entero o decimal periódico o no periódico |
| $\mathbb{C}$ | Complejos | $a+b\mathrm{i}$ siendo $a,b\in\mathbb{R}$ , $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ |

Antes de continuar veamos un par de ideas básicas sobre la representación gráfica de los números reales.

[1] El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con las operaciones internas suma (+) y producto (·) y con la relación de orden total (≤), tiene una estructura algebraica que se denomina cuerpo ordenado.

## La recta real

El conjunto de los números reales se suele visualizar gráficamente mediante una recta, la *recta real*. En ella cada número real $a\in\mathbb{R}$ es representado por un punto de la recta (ver Figura 1.1).

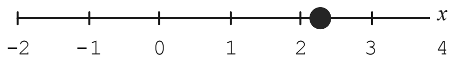



**Figura 1.1: Recta real $\mathbb{R}$. Punto $a = 2{,}25$**

Una vez fijado el punto correspondiente al cero, que nos da el origen, y a su derecha el punto correspondiente al uno, que nos determina la escala, cada número real queda asociado con un punto de la recta.

## Distancia entre dos puntos

La *distancia entre dos puntos a* y *b* de $\mathbb{R}$ se obtiene haciendo el valor absoluto de su diferencia:

$$a,b\in\mathbb{R} \qquad d(a,b) = |a-b| = |b-a|$$

Así, la distancia entre los puntos $a = 2$ y $b = -1$ es igual a tres $d(2,-1) = 3$.

En un dibujo a escala, la operación matemática realizada para obtener la distancia entre dos puntos coincide con la noción intuitiva de distancia geométrica. Gráficamente la distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que une ambos puntos como se muestra en la Figura 1.2.

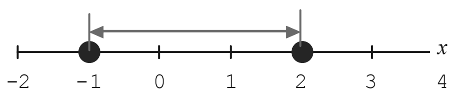



**Figura 1.2: Distancia entre los puntos $a = 2$ y $b = -1$. $d(a, b) = 3$**

Obsérvese que hacer el valor absoluto de la diferencia equivale a elevar la diferencia al cuadrado y hacer con ella la raíz cuadrada. Por lo que la distancia se puede calcular también como

$$a,b\in\mathbb{R} \qquad d(a,b) = +\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$$

# 1.2 INTERVALOS

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se pueden describir infinidad de subconjuntos. En esta sección se presentan algunos que son especialmente relevantes: los intervalos.

## Intervalos acotados

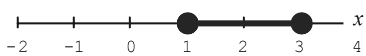
Si se toman dos números reales distintos $a$ y $b$, al conjunto de los números comprendidos entre ambos se le denomina *intervalo acotado* entre $a$ y $b$, o simplemente *intervalo* entre $a$ y $b$. Dependiendo que se incluyan o no los extremos del mismo, se dice que el intervalo es *cerrado*, *abierto* o *semiabierto*.

Suponiendo que de los dos números reales $a$ y $b$ que definen el intervalo, el primero es estrictamente menor que el segundo ($a<b$), la Tabla 1.2 recoge los cuatro casos posibles:

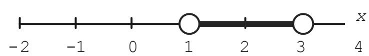
**Tabla 1.2: Intervalos acotados**

| Tipo de intervalo | Definición | Notación |
|---|---|---|
| Intervalo cerrado | $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ | $[a,b]$ |
| Intervalo abierto | $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ | $]a,b[$ ó $(a,b)$ |
| Intervalo semiabierto por la derecha | $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ | $[a,b[$ ó $[a,b)$ |
| Intervalo semiabierto por la izquierda | $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ | $]a,b]$ ó $(a,b]$ |

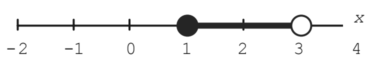
Gráficamente, para poder distinguir si un extremo del intervalo está o no incluido, se representa con un círculo lleno en el caso de estar incluido y con un circulo vacío en el caso de no estar incluido. La Figura 1.3 ilustra los cuatro casos:



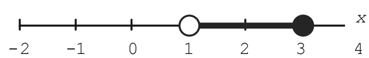

**Intervalo cerrado**




**Intervalo abierto**




**Intervalo semiabierto por la derecha**




**Intervalo semiabierto por la izquierda**

**Figura 1.3: Intervalos acotados**

Estos cuatro tipos de intervalos se denominan intervalos acotados porque siempre se pueden incluir los puntos del intervalo entre un par de números reales. Sin embargo, en ocasiones se utilizan los que se denominan intervalos no acotados.

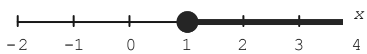
## Intervalos no acotados

Si se toma un sólo número real $a$, al conjunto de los números mayores que él o menores que él se le denomina *intervalo no acotado*. Dependiendo que se incluyan los puntos mayores o menores y de que asimismo dicho punto esté o no incluido se dan los cuatro casos recogidos en la Tabla 1.3.

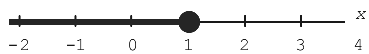
**Tabla 1.3: Intervalos no acotados**

| Tipo de intervalo | Definición | Notación |
|---|---|---|
| Intervalo semiabierto no acotado por la derecha | $I = \{ x\in\mathbb{R} \mid x \geq a \}$ | $[a,+\infty[$ ó $[a,+\infty)$ |
| Intervalo semiabierto no acotado por la izquierda | $I = \{ x\in\mathbb{R} \mid x \leq a \}$ | $]-\infty,a]$ ó $(-\infty,a]$ |
| Intervalo abierto no acotado por la derecha | $I = \{ x\in\mathbb{R} \mid x > a \}$ | $]a,+\infty[$ ó $(a,+\infty)$ |
| Intervalo abierto no acotado por la izquierda | $I = \{ x\in\mathbb{R} \mid x < a \}$ | $]-\infty,a[$ ó $(-\infty,a)$ |

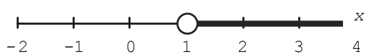
Gráficamente, cada uno de estos cuatro casos se representan en la Figura 1.4.



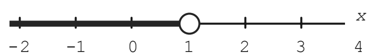

**Intervalo semiabierto**
**no acotado por la derecha**




**Intervalo semiabierto**
**no acotado por la izquierda**




**Intervalo abierto**
**no acotado por la derecha**




**Intervalo abierto**
**no acotado por la izquierda**

**Figura 1.4: Intervalos no acotados**

## Intersección de intervalos

La intersección entre dos intervalos abiertos, sean acotados o no, es bien un intervalo abierto o un conjunto vacío. Por ejemplo

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid 3<x<5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid 1<x<4 \} = \{ x\in\mathbb{R} \mid 4<x<5 \}$$

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid 3<x<5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid 1<x<2 \} = \emptyset$$

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid 3<x<5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid x<4 \} = \{ x\in\mathbb{R} \mid 3<x<4 \}$$

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid 3<x<5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid x<2 \} = \emptyset$$

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid x<5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid x>1 \} = \{ x\in\mathbb{R} \mid 1<x<5 \}$$

Y la intersección entre dos intervalos cerrados es un intervalo cerrado, un número o un conjunto vacío. Por ejemplo

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid 3\leq x\leq 5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 4 \} = \{ x\in\mathbb{R} \mid 4\leq x\leq 5 \}$$

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid 3\leq x\leq 5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 2 \} = \emptyset$$

$$\{ x\in\mathbb{R} \mid 3\leq x\leq 5 \} \cap \{ x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 3 \} = \{ x=5 \}$$

# 1.3 BOLA ABIERTA

Una vez establecido el concepto de intervalo vamos a presentar la definición de bola abierta que, siendo menos conocida, será de gran utilidad para dar el salto al estudio de varias variables. El lector puede omitir este apartado en una primera lectura.

## Bola abierta

La *bola abierta* con centro en un punto $a\in\mathbb{R}$ y radio $r>0$ $r\in\mathbb{R}$, que se representa como $B(a,r)$, está compuesta por todos los puntos de $\mathbb{R}$ que están a una distancia del centro $a$ estrictamente menor que el radio $r$.

$$a\in\mathbb{R} \quad r>0 \;\; r\in\mathbb{R} \qquad B(a,r) = \{ x\in\mathbb{R} \mid d(x,a) < r \}$$

Una bola abierta con centro en el punto $a = 2{,}25$ y radio $r = 1$ está formada por todos los números reales comprendidos entre 1,25 y 3,25 excluyendo a ambos.

Gráficamente una bola abierta con centro en $a$ y radio $r$ es el segmento que va desde $a–r$ hasta $a+r$ (excluidos los extremos), como se puede ver en la Figura 1.5.

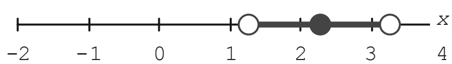



**Figura 1.5: Bola abierta con centro en el punto $a = 2{,}25$ y radio $r = 1$**

## Relación entre bola abierta e intervalo

Obsérvese que la bola abierta con centro en $a$ y radio $r$ es el intervalo acotado abierto comprendido entre los puntos $(a–r)$ y $(a+r)$:

$$B(a,r) = \{ x\in\mathbb{R} \mid (a-r) < x < (a+r) \} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Intervalo } ]\, a-r , a+r\, [$$

La bola abierta con centro en el punto $a = 2{,}25$ y radio $r = 1$ es lo mismo que el intervalo acotado abierto desde 1,25 hasta 3,25.

De igual manera, el intervalo acotado abierto entre 2 y 5 (el intervalo ]2 , 5[ ) es la bola abierta con centro en el punto 3,5 y radio 1,5.