

# **La Optimización Lineal: Un Instrumento de Gestión**

Miguel Angel Larrinaga Ojanguren

Profesor del Departamento de Finanzas y  
Técnicas Cuantitativas

BIBLIOTECA DE GESTIÓN  
DESCLÉE DE BROWER

# ÍNDICE

<b>AGRADECIMIENTOS.....</b>	<b>9</b>
<b>PRESENTACIÓN .....</b>	<b>11</b>
Introducción .....	11
Tan antigua como el mundo .....	12
Una abundancia de programación lineal .....	12
La optimización lineal como competencia profesional .....	14
La optimización lineal en la empresa .....	15
Estrategias de Enseñanza/Aprendizaje .....	17
Estructura del libro .....	18
Unas palabras finales.....	19
<b>1 UNA CIERTA LIMITACIÓN.....</b>	<b>21</b>
1.1 Introducción.....	21
1.2 La empresa BOCASA.....	22
1.2.1 El proceso productivo.....	22
1.2.2 Un primer avance .....	23
1.2.3 El resumen de los datos.....	25
1.3 Una resolución con sentido común.....	26
1.4 Un paso más allá.....	29
1.5 El papel de la optimización lineal.....	30
1.6 A modo de conclusión .....	31
<b>2 UNA VISIÓN GRÁFICA.....</b>	<b>35</b>
2.1 Introducción.....	35
2.2 Razones para la linealidad .....	36
2.3 Construyendo un modelo.....	37
2.3.1 ¿Cuántas variables?.....	38
2.3.2 ¿Cuántas restricciones? .....	39
2.3.3 ¿Qué unidades de medida?.....	39
2.3.4 ¿Cuántas funciones objetivo?.....	40
2.4 El ejemplo a utilizar.....	41
2.5 Cálculos Preliminares .....	42
2.6 Pasos a seguir para la obtención del modelo .....	43
2.6.1 Determinación de las variables de decisión .....	43

6	LA OPTIMIZACIÓN LINEAL: UN INSTRUMENTO DE GESTIÓN	
	2.6.2	Determinación de las restricciones.....43
	2.6.3	Determinación de la función objetivo .....44
	2.7	Resolución Gráfica .....44
	2.8	Otros Tipos de Soluciones.....48
	2.8.1	Solución múltiple .....48
	2.8.2	Solución ilimitada .....50
	2.8.3	Problema irrealizable.....50
	2.9	A modo de conclusión .....51
<b>3</b>	<b>SENSIBILIDAD: MÁS ALLÁ DEL ÓPTIMO .....</b>	<b>55</b>
	3.1	Introducción.....55
	3.2	Cambio en las disponibilidades de los recursos.....56
	3.3	Cambio en los coeficientes de las variables en la función objetivo 61
	3.4	Un breve apunte de Solver.....63
	3.5	Cambio en los consumos unitarios de recursos .....66
	3.6	Programación Paramétrica.....68
	3.7	A modo de conclusión .....70
<b>4</b>	<b>DUALIDAD: EL REVERSO.....</b>	<b>75</b>
	4.1	Introducción.....75
	4.2	Otro sencillo ejemplo.....76
	4.3	Una pequeña vuelta de tuerca (v1.0) .....78
	4.4	Una pequeña vuelta de tuerca (v2.0) .....81
	4.5	El dual cómo herramienta de búsqueda de nuevas variables.....83
	4.6	Una última reflexión .....85
	4.7	Conclusión .....87
<b>5</b>	<b>UNA CUESTIÓN DE OBJETIVOS .....</b>	<b>91</b>
	5.1	Introducción.....91
	5.2	El objetivo como meta .....92
	5.2.1	Un ejercicio <i>ajustado</i> .....93
	5.2.2	Una pequeña variante .....97
	5.2.3	Una aplicación empresarial .....99
	5.3	Riesgo y Rendimiento.....103
	5.4	Una eficiencia más compleja .....106
	5.5	A modo de conclusión .....111
<b>6</b>	<b>ALGUNOS EJEMPLOS.....</b>	<b>115</b>
	6.1	Introducción.....115
	6.2	Modelo 1.....116
	6.3	Modelo 2.....118
	6.3.1	Enunciado Modelo 2 .....118
	6.4	Modelo 3.....120
	6.5	Modelo 4.....125

6.5.1	Enunciado Modelo 4 .....	125
6.6	Modelo 5 .....	128
6.7	Modelo 6 .....	131
6.8	Modelo 7 .....	133
6.9	Modelo 8 .....	138
6.10	Modelo 9 .....	140
6.11	Modelo 10 .....	144
<b>7</b>	<b>CONTINUARA.....</b>	<b>147</b>
7.1	El libro como emoción.....	148
7.2	El libro como experiencia .....	149
7.3	Un final inesperado .....	150
<b>8</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>155</b>
8.1	Libros y Artículos .....	155
8.2	Páginas Web .....	159
8.3	Proveedores de Software .....	160
<b>I</b>	<b>ANEXO I: UNA TARDE DE MATEMÁTICAS .....</b>	<b>161</b>
I.1	A modo de introducción .....	161
I.2	Un primer paso: Kuhn-Tucker .....	162
I.3	Solución Básica, Puntos Extremos, Optimo. ....	166
I.3.1	Definición de solución básica realizable.....	167
I.3.2	¿Para qué las soluciones básicas realizables? .....	169
I.3.3	Definición de puntos extremos .....	171
I.4	En busca del óptimo.....	172
I.5	Algoritmo Simplex .....	173
I.6	Tabla del Simplex .....	174
I.7	Solución Irrealizable.....	179
I.8	Solución Ilimitada.....	182
I.9	Solución Múltiple .....	184
<b>II</b>	<b>ANEXO II: UNA DUALIDAD MATEMÁTICA.....</b>	<b>191</b>
II.1	Justificación de la Dualidad .....	191
II.2	Aproximación a la Dualidad .....	192
II.2.1	Un problema excesivamente sencillo .....	193
II.2.2	Un problema más corriente.....	193
II.2.3	Una nueva idea .....	195
II.2.4	Resumen .....	196
II.3	Teoría de la Dualidad.....	196
II.4	Interpretación Económica de la Tabla del Simplex .....	203
II.4.1	Un ejemplo numérico .....	203
II.4.2	Calculo de variables duales .....	205
II.4.3	El dual en la Tabla del Simplex.....	207
II.4.4	El significado de la Tabla del Simplex .....	208

II.4.5	Interpretación Económica del planteamiento Dual.....	209
II.4.6	El dual para generar columnas.....	211
II.5	El algoritmo Simplex-dual.....	212
II.5.1	Una cuestión final.....	214
<b>III</b>	<b>ANEXO III: UN MANUAL DE SOLVER .....</b>	<b>217</b>
III.1	Presentación.....	217
III.2	El ejemplo a utilizar.....	218
III.2.1	Enunciado.....	218
III.2.2	Comentario al enunciado.....	221
III.3	Diseño de la Hoja de Cálculo .....	222
III.3.1	Datos .....	223
III.3.2	Variables .....	224
III.3.3	Restricciones y Función Objetivo .....	224
III.4	La Macro Solver .....	225
III.4.1	Menú Principal .....	226
III.4.2	Agregando una restricción .....	227
III.4.3	Usando las Opciones .....	231
III.5	Tipos de Soluciones.....	232
III.6	Salidas de un modelo No lineal .....	234
III.6.1	Informe de Respuestas .....	234
III.6.2	Informe de Sensibilidad .....	234
III.6.3	Informe de Límites.....	239
III.7	Salidas de un modelo lineal .....	241
III.7.1	Informe Sensibilidad Modelo Lineal Continuo.....	242
III.8	Introduciendo Variables Enteras.....	245
III.9	Introduciendo Variables Bivalentes.....	247

# AGRADECIMIENTOS

Nada es más grato que comenzar un libro con los agradecimientos a aquellos que han ayudado a la finalización del mismo. Con la máxima de “aprendemos enseñando”, este libro está inicialmente agradecido a todos los profesores que he tenido en La Comercial. Si en aquellos tiempos, lejos de las “revolucionarias reformas educativas” que trae el proceso de integración en el espacio europeo de educación superior fueron capaces de transmitir no sólo conocimiento sino también interés, nada es más justo que mencionarles en estas líneas. Así, José Luis y muy especialmente José Vicente, responsables del área de Técnicas Cuantitativas han sido un espejo en el que mirarme.

El autor es a veces laberíntico en su discurso, barroco en el lenguaje y amante de las frases largas que dejan exhausto al lector que discurre por las mismas sin equipamiento adecuado. María, Álvaro, Joseba, Inmaculada han sido profesores que han sabido acortar mis páginas, limpiar mis párrafos y suavizar los textos.

Amaia, Luis, Leire y Feli son otros profesores que, con sus palabras amables, pensamientos de Marcial, haikus indescifrables, regañinas periódicas, etc. me han permitido disfrutar de tiempo útil para el trabajo.

Fernando y Javier, financieros impenitentes, también tienen su rincón en estos agradecimientos como ejemplo de constancia. Antonio y Susana, por introducirme en la idea del factor escaso.

El personal de La Comercial también tiene una línea de agradecimiento por darme tiempo, una sonrisa en momentos tristes, por no ordenar mi desordenada mesa de apuntes, por regar las flores.

Huelga decir que el autor está igualmente agradecido a todos los autores consultados, a todos los alumnos que me han hecho mejorar en mi docencia y por supuesto, a todos los compositores literarios y musicales que me han acompañado en las horas de trabajo.

Finalmente, mi padre y mi madre: su cariño y su paciencia me han demostrado que el conocimiento más importante y perenne es el que llega, no al cerebro, sino al corazón y que la mejor metodología es la humildad en la transmisión de conocimientos. Espero que este libro colabore de alguna manera a que en el futuro haya más padres como ellos.

Como se puede deducir el libro está escrito, pensado y diseñado por el autor pero en el fondo no es totalmente suyo. Por ello, los derechos de autor correspondientes a este libro irán íntegramente a la Fundación Animo, destinada a ayudar al acceso a la formación de jóvenes que, por limitaciones socioeconómicas no gozan de esa posibilidad – y he aquí el primer ejemplo de optimización condicionada del libro.

# PRESENTACIÓN

Los objetivos de este capítulo son los siguientes:

- Presentar el libro desde una triple perspectiva:
  - Competencial: Objetivos perseguidos en términos de competencias.
  - Empresarial: Qué puede aportar a la gestión diaria.
  - Proactiva: Cómo involucrar al lector.
- Estructurar el paseo.

## Introducción

Resulta complicado, a la hora de introducir un libro, lograr un equilibrio entre un tono distendido, que “venda” el libro, y un tono científico, que acredite la rigurosidad del mismo. Además, los nuevos productos multimedia parecen minorar el encanto de un libro. Quizás, debiéramos utilizar la técnica que Groucho Marx, por ejemplo, presentaba en las primeras páginas de su autobiografía, *Groucho y yo* como herramienta de venta de su libro<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> “Groucho y yo”, por Groucho Marx. Ed. Tusquets 2001, 320 pags. El texto original en inglés dice en su pág 5: “*But as an added attraction, at no extra charge, my idea was to put a fried egg on the cover. I think a lot of people that hate literature but*

Las siguientes líneas pretenden recoger, en el fondo, razones para la lectura y, espero, disfrute de este libro.

## Tan antigua como el mundo

En pocas palabras podemos decir que la optimización lineal, es decir, la búsqueda de un óptimo en un problema es, si se me admite la hipérbole, la plasmación matemática de una pregunta filosófica: ¿Cómo ser feliz? Expliquemos esta metáfora.

Tenemos un objetivo claro en términos lingüísticos: “*felicidad*”<sup>2</sup> pero muchas veces es difícil plasmarlo en términos más tangibles.

Aún suponiendo que hayamos llegado a esa feliz plasmación de felicidad en, por ejemplo, disponer de un equilibrio salud-riqueza sostenible en el tiempo, viene la siguiente pregunta clave. ¿Cómo?. Tenemos muchas formas de lograrlo pero no todas son válidas para el contexto socio-cultural y económico en el que nos encontramos. Es decir, unas condicionantes internas y externas delimitan el conjunto posible de opciones a manejar. Finalmente una vez elegidas las opciones, la realidad cambiante hace que el camino hacia la felicidad no sea exactamente el esperado.

Al tratarse de una pregunta antigua, las posibles respuestas vienen desde antiguo. Pensando en términos puramente matemáticos podemos citar a Isaac Newton, quien en 1665 planteó su solución a la búsqueda de un óptimo local. Veamos cómo es la cosecha en la actualidad.

## Una abundancia de programación lineal

Es muy posible que usted, posible comprador del libro, ojee esta introducción con el pensamiento de “¡Otro libro de programación lineal!” o “¡Más matemáticas para la toma de decisiones! Pero si éstas muchas veces no se

---

*loved fried eggs would buy if the price was right*” que puede ser consultado en la página web: [http://www.amazon.com/gp/reader/0306806665/ref=sib\\_dp\\_pt/102-6749071-3502513#reader-link](http://www.amazon.com/gp/reader/0306806665/ref=sib_dp_pt/102-6749071-3502513#reader-link) .

<sup>2</sup> A título de curiosidad, la Real Academia de la Lengua, en su 22ª edición definía la felicidad como “*estado del ánimo que se complace en la posesión de un bien*”. Esta definición está prevista que se modifique en su 23ª edición con el siguiente texto: “*estado de grata satisfacción espiritual y física*”. ([www.rae.es](http://www.rae.es)).

toman tan racionalmente porque no hay datos, tiempo, software, motivación o cualquier combinación de ellas.”

De hecho, la cosecha de textos sobre programación lineal puede calificarse como de generosa, rayana en términos de sobreexplotación. Para ello también bucaremos el término “investigación operativa”, que engloba a la optimización lineal, y, que en pocas palabras, podemos definirla como un conjunto de técnicas matemáticas para ayudar a la toma de decisión empresarial. Vayamos a Internet:

- Por ejemplo, si buscamos en [www.amazon.com](http://www.amazon.com) por “Linear Programming” probablemente aparecerán más de 9.000 libros, aunque “sólo” 1.200 dentro del subgrupo de Economics y 1.330 en la categoría de Management & Leadership.
- Si ampliamos la búsqueda a “Operations Research”, el número de referencias seguramente superará los 18.000, y en las categorías mencionadas encontramos 2.580 y 3.625, respectivamente. Además bastantes libros vienen acompañados de material en la red, suplementos, etc.

Como suele ser habitual, un tema tan prolífico impulsó la creación de sociedades y organizaciones que tratan esos temas. Las sociedades de investigación operativa, tanto españolas ([www.seio.es](http://www.seio.es)) como británica ([www.orsoc.org.uk](http://www.orsoc.org.uk)) o americana ([www.informs.org](http://www.informs.org)) por nombrar algunas son buenas fuentes de ejemplos de aplicación de diversas técnicas de investigación operativa en general y de optimización lineal en particular.

Finalmente, un reciente esfuerzo de situar a la investigación operativa nuevamente en el mercado lo podemos encontrar en la página Web <http://www.scienceofbetter.org/> como escaparate para el mismo.

Desde el punto de vista editorial, un nuevo libro de optimización lineal parece, por tanto, destinado al olvido o como máximo al reducido círculo de los alumnos de un determinado profesor. Las nuevas tecnologías permiten que ciertos clásicos como el libro “Applied mathematical programming” de Bradley, Hax y Magnanti (1977) puedan descargarse libremente desde la dirección <http://web.mit.edu/15.053/www/AppliedMathematicalProgramming.pdf>.

Un libro presente en muchas bibliografías sobre la materia es “Introduction to Operational Research, 8th Edition” (MacGraw-Hill, 2005) de Frederick S Hillier y Gerald J Lieberman, de actualización periódica y que abarca la investigación operativa en su conjunto.